**תרגיל 3 – יחס שקילות ויחס סדר**

**להגשה: 1, 3, 5, 6 ב,ד. 7, 8, 10 א,ד, 12 א,ד. 13. 15**

1. **תהי . נגדיר יחס  על הקבוצה :**

** כאשר .**

1. **הראה ש-  יחס שקילות על A.**

צ"ל סימטריות, טרנזיטיביות, ורפלקסיביות:

סימטריות: יהיו וכן כך שמתקיים , צ"ל כי :

טרנזיטיביות: יהיו וכן , צ"ל כי :

רפלקסיביות: יהי וכן , צ"ל כי

1. **מהי מחלקת השקילות של ?**

ובמילים: מספר שלם, y מספר טבעי, כך שהמנה שווה ל.

1. **ניתן "לזהות" את (קבוצת המנה של R) עם קבוצה מסוימת המוכרת לך. מהי?**

(קבוצת המספרים הרציונליים)

1. **נגדיר יחס על הקבוצה  באופן הבא: .**



לפני שנוכיח דברים על R, נגדיר אותו בצורה קצת שונה: , כלומר מדובר על שויון **בהפרש** בין הערכים.

1. **הוכח ש יחס שקילות על .**

צ"ל סימטריות, טרנזיטיביות, ורפלקסיביות:

סימטריות: אם אז השויון מתקיים גם בכיוון ההפוך, כמובן.

טרנזיטיביות: אם וגם (אפשר להפוך סדר ע"פ הסימטריות) אז גם , כנדרש בטרנזיטיביות.

רפלקסיביות: יהיו , צ"ל כי

1. **מהי מחלקת השקילות של ?**

אוסף הזוגות הסדורים כך שמתקיים .

1. **מצא נציג לכל מחלקת שקילות . מהי החלוקה ש  משרה?**

נציג למחלקה המכילה את הוא: .

החלוקה היא לקבוצת זוגות סדורים של מספרים שלמים, שערך המספר השני פחות ערך המספר הראשון שווה למספר קבוע (ישרים במישור, העולים בזוית 45 מעלות).

1. **נגדיר על  את היחס  כך:  כאשר  וגם .**

זהירות: כאן לא מדובר על יחס סדר בין הרציונליים (יחס סדר בין הרציונליים הוא יחס סדר מלא)!

1. **הוכח ש יחס סדר על  .**

צ"ל אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות, ורפלקסיביות:

אנטי-סימטריות: יהיו כך שמתקיים וגם , צ"ל כי :

ע"פ ההגדרה מתקיים וגם , ולכן וגם , כנדרש.

טרנזיטיביות: יהיו וכן , צ"ל כי :

רפלקסיביות: יהיו , צ"ל כי

1. **הוכח ש  אינו יחס סדר מלא על .**

צ"ל כי קיימים כך ש: וגם . דוגמא:

1. **שרטט דיאגראמת הסה של הסדרים המוגדרים ע"י היחס  מעל הקבוצות הבאות:**

**ב.  .**

כל מספר ברשימה הנ"ל מחלק את כל המספרים שמימינו, ולכן הדיאגרמה תראה (בצורה טבלאית) כך:

|  |
| --- |
| 64 |
| 32 |
| 16 |
| 8 |
| 4 |
| 2 |

**ד. קבוצת כל המחלקים של .**

**תזכורת: היחס  מוגדר על כל תת קבוצה של הטבעיים ע"י:  כאשר  מחלק של , כלומר קיים  טבעי כך ש .**

קבוצת כל המחלקים של 60 היא: , והדיאגרמה היא (כולם בטבלה, חוץ מהמספר 6 שהוא מחלק באופן ישיר גם את 30 וגם את 12, ומחולק באופן ישיר גם ע"י 3 וגם ע"י 2, ואת זה סימנתי בחיצים):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 60 | | | | | | |
| 30 | | | 20 | | 12 | |
| 15 | | 10 | | 4 | | 6 |
| 3 | 5 | | 2 | | | |
| 1 | | | | | | |

1. **שרטט את כל דיאגראמות הסה ה"שונות" האפשריות עבור יחס סדר המוגדר על קבוצה בת 3 איברים.**

נסמן את האיברים , וניצור דיאגרמות טבלאיות:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a | b | c |

|  |  |
| --- | --- |
| a | b |
| c | |

|  |  |
| --- | --- |
| a | |
| b | c |

|  |  |
| --- | --- |
| a | c |
| b |

|  |
| --- |
| a |
| b |
| c |

הנחתי שa לא "קטן" מb וכן שb לא "קטן" מc. במקרה שנגדיר את היחס אחרת – נקבל שלש אפשרויות לכל אחת משתי הדיאגרמות האמצעיות-ימניות, ושש אפשרויות לדיאגרמה השמאלית.

כמו"כ הדיאגרמה השניה משמאל מניחה שהאיבר b הוא ה"קטן" מהאיבר a. באותה מידה היה יכול להיות שם זוג אחר מתוך השלשה.

סה"כ הדיאגרמות האפשריות – בלי ההנחות הנ"ל – הן 19 דיאגרמות (אחת לימנית, שלש לכל אחת משתי האמצעיות-ימניות, ושש לכל אחת מהשמאליות).

1. **נגדיר יחס  על  באופן הבא:  כאשר  . האם  הוא יחס סדר? נמק.**

היחס הוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי (כי זה סוג של שויון), אך הוא לא אנטי-סימטרי (לדוגמא ), ולכן איננו יחס סדר.

1. **יהי R יחס סדר על קבוצה A .**

**בכל אחד מהסעיפים א-ד הוכח או הפרך את הטענה ש- S יחס שקילות ובנוסף ציין לאיזה מהיחסים**

**הבאים S שווה : .**

**א. נגדיר יחס S על A באופן הבא: לכל  : כאשר  וגם .**

היחס שווה ל.

הוא סימטרי ע"פ הגדרתו. הוא רפלקסיבי כפי שהוכחתי בשאלה 8 שבתרגיל 2, שחיתוך בין יחסים רפלקסיביים הוא רפלקסיבי. והוא טרנזיטיבי כפי שהוכחתי שם בשאלה 17.

מסקנא: היחס הוא יחס שקילות.

**ד. נגדיר יחס S על A באופן הבא: לכל : כאשר קיים  כך ש-  וגם .**

היחס שווה ל.

היחס טרנזיטיבי ורפלקסיבי, אך איננו חייב להיות סימטרי. לדוגמא: היחס "קטן/שווה" בין מספרים ממשיים. (t יכול להיות 4), אך *לא ניתן למצוא t שיקיים .*

1. **יהיו שני יחסי סדר כלשהם על קבוצה .**
2. **הוכח או הפרך:  יחס סדר על .**

היחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי כנ"ל 10א. נותר להוכיח שהוא אנטי-סימטרי:

יהיו כך שמתקיים וגם , צ"ל כי :

1. **הוכח או הפרך:  הוא יחס סדר על .**

כל איבר בקבוצה עומד עם עצמו ביחס R ולכן גם ביחס ההופכי, ומכאן שהיחס **רפלקסיבי**.

אם וגם אז וגם ולכן ולכן , ומכאן שהיחס **טרנזיטיבי**.

אם וגם אז וגם ולכן , ומכאן שהיחס **אנטי-סימטרי**.

1. **נתבונן בקבוצה . תהי  תת-הקבוצה של  שאיבריה הן כל תת-הקבוצות של  שסכום איבריהן  או  או 7 או 15.**

**נתבונן ביחס  על  ועל B . קל לראות (ואין צורך להוכיח) ש  הוא יחס סדר על כל אוסף של קבוצות ובפרט על  ועל .**

1. **הוכח ש  אינו יחס סדר מלא על .**
2. **הוכח ש  אכן יחס סדר מלא על .**

הראיתי איך שכל איברי B מוכלים זה בזה בשרשרת ליניארית מלאה, ומכאן שזהו יחס סדר מלא/ליניארי.

1. **נגדיר על  את היחס הבא:  אם ורק אם . האם  הוא יחס שקילות על ? הוכח או הפרך.**

היחס רפלקסיבי (לכל קבוצה – חיתוכה עם עצמה איננו קבוצה ריקה), וסימטרי (כי ההגדרה סימטרית), אך איננו טרנזיטיבי. דוגמא נגדית:

1. **יהי R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על קבוצה A.**
2. **נגדיר יחס  על A באופן הבא - לכל  :  כאשר  וגם . הוכח ש-**  **יחס שקילות על A .**

היחס שווה ל.

הוא סימטרי ע"פ הגדרתו. הוא רפלקסיבי כפי שהוכחתי בשאלה 8 שבתרגיל 2, שחיתוך בין יחסים רפלקסיביים הוא רפלקסיבי. והוא טרנזיטיבי כפי שהוכחתי שם בשאלה 17.

1. **נגדיר יחס**  **על** **באופן הבא - לכל**  **:  כאשר קיימים  ו-  כך ש- . הוכח ש-  יחס סדר על  .**

רפלקסיביות: יהי (תזכורת: ), ע"פ הרפלקסיביות של R מתקיים , ומכאן כנדרש.

טרנזיטיביות: יהיו אז מתקיים , וע"פ הטרנזיטיביות של R מתקיים , ומכאן כנדרש.

אנטי סימטריות:

יהיו כך ש , אז קיימים שמקיימים , וגם קיימים כך ש.

ע"פ הגדרת מתקיים (כל איבר בקבוצה X עומד ביחס R עם כל איבר בקבוצה X כי זו מחלקת שקילות), וגם (כנ"ל).

ע"פ הטרנזיטיביות של R: , ומכאן (כי הם עומדים ביחס R ישר והפוך), ולכן הם נמצאים באותה מחלקת שקילות, כלומר .